SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Angelo Favini

CONTROLLO OTTIMO E PROBLEMI DEGENERI DI TIPO TWO-POINT

25 gennaio 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto.

Si considera il problema del regolatore quadratico per l'equazione differenziale lineare degenere in uno spazio di Hilbert H

$$\frac{d}{dt}(My(t)) + Ly(t) = f(t) + Bu(t), \quad 0 < t < \tau.$$

Si prova che sotto opportune condizioni esiste una unica L^2-soluzione ottima. In taluni casi si caratterizza la coppia ottima mediante un sistema di equazioni e condizioni ai limiti di tipo two-point.

Abstract.

The quadratic regulator problem for the degenerate linear differential equation in a Hilbert space H

$$\frac{d}{dt}(My(t)) + Ly(t) = f(t) + Bu(t), \quad 0 < t < \tau,$$

is considered. We prove that under suitable conditions there exists a unique optimal L^2-solution. In some particular cases we characterize the optimal pair by means of a system of equations and boundary conditions of two-point type.

1. Introduzione

Consideriamo il sistema di controllo

$$(1.1) \qquad \frac{d}{dt}(My)(t) + Ly(t) = f(t) + Bu(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$(1.2) \qquad (My)(0) = My_0,$$

in uno spazio di Hilbert H. Qui $M : D(M)(\subseteq H) \to H$ e $L : D(L)(\subseteq H) \to H$ sono operatori lineari chiusi densamente definiti, B é lineare continuo da U (spazio di Hilbert dei controlli) in H ($B \in L(U;H)$), y_0 é un fissato elemento di $D(L)$, f é una data funzione da $(0,\tau)$ in H, $u(\cdot)$ é il controllo in un insieme $\mathcal{U}_{ad}$ di controlli ammissibili. Non é restrittivo supporre che $D(L) \subseteq D(M)$ e che $0 \in \rho(L)$. Una tale ipotesi sará fatta in tutta la nostra esposizione. Se M é l'operatore identitá in H, il problema (1.1),(1.2) é stato ampiamente studiato. Esistenza e unicitá della soluzione forte, stretta, classica, L^2, debole, integrale, ..., sono state stabilite sia nel caso iperbolico che parabolico. Anche se $M \neq I$ non é necessariamente invertibile, c'é una vastissima bibliografia. Se $M = I$, facendo riferimento alla basilare monografia [9] di J. L. Lions, si mostra che sotto convenienti ipotesi su L, il problema (1.1),(1.2) ha una unica soluzione L^2 purché $f \in L^2(0,\tau;H)$, $u \in L^2(0,\tau;U)$ e $y_0 \in D(L)$. H é in effetti uno spazio duale, perché Lions é interessato alla soluzione variazionale. L^2-soluzione significa che $u \in L^2(0,\tau;D(L))$, $Mu \in H^1(0,\tau;H)$, l'equazione (1.1) é soddisfatta q.d. su $(0,\tau)$ e (1.2) é vera nel senso di limite. Se $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ é un sottoinsieme convesso chiuso di $L^2(0,\tau;U)$, si considera un operatore C lineare limitato da H ad uno spazio di Hilbert Z, un operatore N autoaggiunto, definito positivo $\in L(U)$ e si introduce il funzionale costo

$$(1.3) \qquad J(u) = \int_0^\tau |C(y(u)(t) - y_0(t))|_Z^2 dt + \int_0^\tau \langle Nu(t), u(t)\rangle_U dt,$$

dove $y_0(\cdot)$ é un dato elemento di $L^2(0,\tau;H)$, e si vede [9], pp. 111-112, che J ha minimo su $\mathcal{U}$, cioé

$$\inf_{\mathcal{U}} J(u) = J(u^*)$$

e $u^* \in \mathcal{U}$ é unico. Naturalmente, $y(u)(\cdot)$ denota la soluzione di (1.1),(1.2) corrispondente al controllo u e il dato $f \in L^2(0,\tau;H)$. Inoltre, se $\mathcal{U} = L^2(0,\tau;U)$, allora $u^* = -N^{-1}B^*p$, dove $(y,p) \in L^2(0,\tau;D(L)) \times L^2(0,\tau;D(L^*))$ é l'unica soluzione del sistema differenziale di tipo two-point

$$(1.4) \qquad \frac{dy}{dt} + Ly + BN^{-1}B^*p = f$$

$$(1.5) \qquad -\frac{dp}{dt} + L^*p = C^*C(y - y_0(\cdot))$$

$$(1.6) \qquad y(0) = y_0, \quad p(\tau) = 0,$$

vedi Lions [9], p.115. Come é ben noto, se M non é invertibile, la risolubilitá di (1.1), (1.2) sotto ipotesi del tipo precedente non é affatto garantita. Anzi, senza condizioni di regolaritá temporale per $f(\cdot)$ e compatibilitá fra $f^{(k)}(0)$ e y_0, con k intero opportuno, soluzioni del tipo sopra richiamato non esistono. Noi considereremo il caso speciale, ma interessante per le applicazioni, in cui $z = 0$ é una singolaritá polare di ordine $m \geq 1$ per il risolvente $(z+T)^{-1} = L(zL+M)^{-1}$, dove $T = ML^{-1}$. L'analisi distinguerá peró l'ordine $m > 1$ da $m = 1$; in relazione a quest'ultimo si ottengono i risultati piú vicini alla situazione regolare.

Il problema del regolatore per equazioni lineari degeneri di tipo speciale $(L = I)$ in spazi finito-dimensionali é stato considerato da L. Pandolfi [10], mentre l'analogo problema sull'intervallo $(0, \infty)$, $H = R^n$, $U = R^m$, $C > 0$ é discusso in J. D. Cobb [3]. Altri risultati sono descritti nella monografia di L. Dai [5]. In dimensione infinita, tecniche completamente diverse sono state usate da Sviridyuk ed Efremov in [11] per trattare problemi di minimo simili al nostro, relativi all'equazione di tipo Sobolev

$$(1.7) \qquad M\dot{y}(t) + Ly(t) = f(t) + Bu(t).$$

Proprio la presenza della derivata $\dot{y}(t)$ di $y(t)$ in (1.7) costringe Sviridyuk e Efremov a considerare in ogni caso, anche $m = 1$, funzionali costo contenenti opportune derivate del controllo $u(\cdot)$.

Nel paragrafo 2 verranno enunciati risultati di esistenza per soluzioni L^2 di equazioni degeneri. Nel paragrafo 3 mostreremo che certi funzionali costo associati a (1.1),(1.2) hanno minimo. Infine, nel paragrafo 4 studieremo un problema two-point per equazioni degeneri, ottenendo estensioni di risultati classici. Buona parte dei risultati esposti si trova nel lavoro [1] e nel preprint [2] di Barbu e Favini.

2. L^2-soluzioni di equazioni differenziali degeneri

In questo paragrafo estendiamo il metodo di Favini e Yagi [8] per soluzioni di (1.1) nello spazio delle funzioni continue $C[0,\tau;H]$ a soluzioni in $L^2(0,\tau;H)$. Facciamo l'assunzione fondamentale

$$(2.1) \qquad \|(z+T)^{-1}\|_{L(H)} = \|L(zL+M)^{-1}\|_{L(H)} \leq \tfrac{C}{|z|^m}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon_0,$$

dove m é un numero naturale. É ben noto allora che H é la somma diretta

$$H = N(T^m) \oplus R(T^m),$$

dove $N(T^m)$ é lo spazio nullo di T^m e $R(T^m)$ é l'immagine di T^m. Tali spazi sono topologicamente chiusi. Inoltre, se P denota la proiezione di H su $N(T^m) = H_1$ lungo $R(T^m) = H_2$, $T_1 = T_{|H_1} \in L(H_1)$, $T_2 = T_{|H_2} \in L(H_2)$, allora T_2 ha inverso limitato (in H_2) e $T_1^m = 0$. Tenendo conto del fatto che, previo cambiamento di variabile $Ly = w$, (1.1) si legge

$$\frac{d}{dt}(Tw) + w = f(t) + Bu,$$

o anche

$$\frac{d}{dt}(T_1 Pw) + Pw = P[f(t) + Bu], \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}(T_2(1-P)w) + (1-P)w = (1-P)[f(t) + Bu]. \tag{2.3}$$

(2.3) viene trasformata in una equazione regolare ponendo $T_2(1-P)w = \psi$; la (2.2) viene invece risolta facilmente se f e u ammettono un certo numero di derivate (precisamente, $m-1$), in forza di $T_1^m = 0$. In effetti, se denotiamo con $H^k(0,\tau;H)$, $k \in N \cup \{0\}$, $H^0(0,\tau;H) = L^2(0,\tau;H)$, lo spazio di Sobolev delle funzioni da $(0,\tau)$ a H, e

$$H_0^k(0,\tau;H) = \{f \in H^k(0,\tau;H); \quad f^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0,1,\dots k-1\}, \quad k \geq 1,$$

si vede che per ogni $f \in H^{m-1}(0,\tau;H)$, $u \in H^{m-1}(0,\tau;U)$, $v_0 \in H$, la funzione

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j L^{-1} T_1^j P(f^{(j)}(t) + Bu^{(j)}(t)) + L^{-1} e^{-tT_2^{-1}} (1-P) v_0 \\ + \int_0^t L^{-1} e^{-(t-s)T_2^{-1}} T_2^{-1} (1-P)[f(s) + Bu(s)] ds \end{aligned} \tag{2.4}$$

descrive tutte le L^2-soluzioni di (1.1). In effetti, $(1-P)w$ é derivabile e soddisfa $T_2 \frac{d}{dt}((1-P)w) + (1-P)w = (1-P)[f(t) + Bu(t)]$. Osserviamo che se $m = 1$, allora $My(t) \to Mu_0$ per $t \to 0+$ purché $u_0 \in D(L)$. Basta scegliere $v_0 = Lu_0$. Se $m > 1$ e $f \in H_0^{m-1}(0,\tau;H)$, allora $My(t) \to T(1-P)v_0 = ML^{-1}(1-P)v_0 = My_0$, se $Ly_0 \in R(T^m)$. Se $f \in H^m(0,\tau;H)$, $u \in H^m(0,\tau;U)$, allora y é piú regolare, nel senso che $y \in H^1(0,\tau;D(M))$ e la (1.1) é vera nel senso piú forte

$$M\frac{dy}{dt} + Ly(t) = f(t) + Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \tag{2.5}$$

quasi dappertutto su $(0,\tau)$. Poiché

$$y(0) = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j L^{-1}T_1^j f^{(j)}(0) + L^{-1}(1-P)v_0,$$

se $f \in H_0^m(0,\tau;H)$, $u \in H_0^m(0,\tau;U)$, allora (2.5) ha una soluzione $y \in H^1(0,\tau;H)$, $\frac{dy}{dt} \in L^2(0,\tau;D(M))$, soddisfacente

$$\text{(2.6)} \qquad y(0) = y_0 \in D(L),$$

se $Ly_0 \in R(T^m)$. Analogamente, il problema

$$M\frac{dp}{dt} - Lp = g(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$p(\tau) = \overline{p} \in D(L)$$

ha soluzione $p \in H^1(0,\tau;H)$, $\frac{dp}{dt} \in L^2(0,\tau;D(M))$, se $g \in H_\tau^m(0,\tau;H)$, dove

$$H_\tau^m(0,\tau;H) = \{g \in H^m(0,\tau;H); \quad g^{(j)}(\tau) = 0, \quad j = 0,1,\dots m-1\},$$

e $L\overline{p} \in R(T^m)$.

3. Il problema di controllo ottimo

Cominciamo col trattare il caso $m \geq 2$ (vedi (2.1)). Abbiamo quindi i tre spazi di Hilbert H, U, Z e gli operatori lineari chiusi M, L in H che soddisfano l'assunzione (2.1) con $m > 1$, $T \in L(H)$, $B \in L(U,H)$, $C \in L(H,Z)$. Siano poi $N_q \in L(U)$ operatori lineari autoaggiunti e definiti positivi per $q = 0,1,\dots,m-1$, $y_0 \in D(L)$, $Ly_0 \in R(T^m)$, $y_0(\cdot) \in L^2(0,\tau;H)$, $f \in H_0^{m-1}(0,\tau;H)$. Sia, infine, $\mathcal{U}$ un sottoinsieme convesso chiuso di $H_0^{m-1}(0,\tau;U)$. Allora consideriamo il problema (1.1), (1.2) in $L^2(0,\tau;H)$, con $u \in \mathcal{U}$. Introduciamo il funzionale costo

$$\text{(3.1)} \qquad J(u) = \int_0^\tau |C(y(u)(t) - y_0(t))|_Z^2 dt + \sum_{q=0}^{m-1}\int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t)\rangle_U dt,$$

con l'ovvio significato della norma e del prodotto interno. Naturalmente, $y(u)$ denota l'unica soluzione $y = y(u)$ di (1.1), (1.2) corrispondente al controllo ammissibile $u \in \mathcal{U}$. Il problema consiste nel trovare $u^* \in \mathcal{U}$ tale che

(3.2) $\qquad J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u).$

Si ha :

Teorema 3.1. *Sotto le ipotesi sopra elencate, esiste un unico controllo ottimo $u^* \in \mathcal{U}$ per (1.1), (1.2), (3.2).*

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che

$$[u, v] = \sum_{q=0}^{m-1} \int_0^{\tau} \langle N_q u^{(q)}(t), v^{(q)}(t) \rangle_U dt \tag{3.3}$$

é una forma bilineare continua e coerciva su $H_0^{m-1}(0, \tau; U)$. Inoltre, poiché B induce un operatore continuo da $H_0^{m-1}(0, \tau; U)$ a $H_0^{m-1}(0, \tau; H)$ e $f \in H_0^{m-1}(0, \tau; H)$, l'applicazione $u \to y(u)$ é continua da $H_0^{m-1}(0, \tau; U)$ in $L^2(0, \tau; H)$. Posto

$$\mathcal{Z} = L^2(0, \tau; Z),$$

le funzioni

$$\pi(u, v) = \langle C[y(u) - y(0)], C[y(v) - y(0)] \rangle_{\mathcal{Z}} + [u, v], \tag{3.4}$$

$$\varphi(u) = \langle C[y_0(\cdot) - y(0)], C[y(u) - y(0)] \rangle_{\mathcal{Z}}, \tag{3.5}$$

sono ben definite e si vede facilmente che

$$J(u) = \pi(u, u) - 2\varphi(u) + |C[y_0(\cdot) - y(0)]|_{\mathcal{Z}}^2$$

é continua e coerciva. Si applica quindi un risultato ben noto di J. L. Lions [9] per concludere la prova. #

Passiamo al caso $m = 1$. Allora sappiamo che per ogni $f \in L^2(0, \tau; H)$ e ogni $y_0 \in D(L)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$, la L^2-soluzione $y = y(u)$ di (1.1), (1.2) esiste ed é data da

$$y(u)(t) = L^{-1}P[f(t) + Bu(t)] + L^{-1}e^{-tT_2^{-1}}(1 - P)Ly_0$$
$$+ \int_0^t L^{-1}e^{-(t-s)T_2^{-1}}T_2^{-1}(1 - P)[f(s) + Bu(s)]ds.$$

In questo caso possiamo prendere come $\mathcal{U}$ un qualsiasi sottoinsieme convesso chiuso di $L^2(0, \tau; U)$. Siano poi $C \in \mathcal{L}(H, Z)$, $N_0 = N = N^* > 0$, $N \in \mathcal{L}(U)$,

$y_0(\cdot) \in L^2(0,\tau;H)$. Allora il funzionale costo $J(u)$ é dato da (1.3), cioé

$$J(u) = \int_0^\tau |C(y(u)(t) - y_0(t))|_Z^2 dt + \int_0^\tau \langle Nu(t), u(t)\rangle_U dt.$$

Poiché $J(u) = \pi(u,u) - 2l(u) + |C(y_0(\cdot) - y(0))|_{\mathcal{Z}}^2$, dove $\pi(u,v)$ e $l(u)$ sono definiti come in (3.3), (3.4) e (3.5) con $m = 1$, ripetendo lo stesso ragionamento come per la prova del Teorema 3.1, si ottiene quanto segue.

Teorema 3.2. *Se $m = 1$ e $y_0 \in D(L)$, sotto le assunzioni precedenti, il problema (3.2) per il sistema (1.1), (1.2) ha una unica soluzione.*

Il passo successivo é quello di estendere (1.4), (1.5) e (1.6) al caso degenere, limitandosi a $m = 1$, perché $m > 1$ sembra estrememente complicato. Ricerche a tal riguardo sono in corso da parte di alcuni allievi di Sviridyuk. Ricordiamo che secondo Lions [9], Theorem 1.2, p. 9, il controllo ottimo u, la cui esistenza ed unicitá é garantita dal Teorema 3.2, é caratterizzato da

$$\pi(u, v-u) \geq l(v-u), \text{ per ogni } v \in \mathcal{U}. \tag{3.6}$$

In particolare, se $\mathcal{U} = L^2(0,\tau;U)$, la (3.6) si riduce a

$$\pi(u,\phi) = l(\phi) \text{ per ogni } \phi \in L^2(0,\tau;U). \tag{3.7}$$

Ora, non é difficile riconoscere che (3.6) é equivalente a

$$0 \leq \pi(u, v-u) - l(v-u)$$

$$= \int_0^\tau \langle C^*C(y(u)(t) - y_0(t)), y(v)(t) - y(u)(t)\rangle dt + \langle Nu, v-u\rangle_{L^2(0,\tau;U)} \tag{3.8}$$

per ogni $v \in \mathcal{U}$. Assumendo l'esistenza dello stato aggiunto $p(u) \in L^2(0,\tau;D(L^*)) \cap H_\tau^1(0,\tau;H)$ soddisfacente

$$-M^*\frac{dp}{dt} + L^*p = C^*C(y(u) - y_0(\cdot)), \quad 0 < t < \tau, \tag{3.9}$$

il primo addendo in (3.8) coincide con

$$\int_0^\tau \langle p(u)(t), (\frac{d}{dt}M + L)(y(v) - y(u))\rangle dt$$

$$= \int_0^\tau \langle p(u)(t), Bv(t) - Bu(t)\rangle dt = \langle B^*p(u), v-u\rangle_{L^2(0,\tau;U)}.$$

Perció un controllo ammissibile u soddisfacente (1.1), (3.9) e (3.10), dove

(3.10) $\langle B^*p(u) + Nu, v - u\rangle_{L^2(0,\tau;U)} \geq 0$ per ogni $v \in \mathcal{U}$,

con $My(0) = My_0$, $p(\tau) = 0$, $My \in H^1(0,\tau;H)$, $p \in H^1(0,\tau;H)$, é necessariamente l'unico controllo ottimo per (1.1), (1.2), (1.3). In particolare, se $\mathcal{U} = L^2(0,\tau;U)$, si deduce che se il problema two-point

(3.11) $\frac{d}{dt}(My) + Ly + BN^{-1}B^*p = f, \quad 0 < t < \tau,$

(3.12) $-M^*\frac{dp}{dt} + L^*p = C^*C(y - y_0(\cdot)), \quad 0 < t < \tau,$

(3.13) $My(0) = My_0, \quad p(\tau) = 0,$

ha soluzione (y,p) (con $y \in L^2(0,\tau;D(L))$), $My \in H^1(0,\tau;H)$, $p \in L^2(0,\tau;D(L^*)) \cap H^1_\tau(0,\tau;H)$, allora $u = -N^{-1}B^*p$ é l'unico controllo ottimo. Ora, (3.11), (3.12) e (3.13) non sono troppo soddisfacenti, perché, come si é visto nel paragrafo precedente, per avere la risolubilitá di (3.12), per y fissato, occorre piú regolaritá per y di quella garantita dalla (3.11). In altri termini, sarebbe auspicabile poter sostituire (3.12) e la condizione $p(\tau) = 0$ con le meno restrittive

(3.14) $-\frac{d}{dt}(M^*p) + L^*p = C^*C(y - y_0(\cdot)), \quad 0 < t < \tau,$

(3.15) $M^*p(\tau) = 0,$

dove $p \in L^2(0,\tau;D(L^*))$, $M^*p \in H^1_\tau(0,\tau;H)$. In effetti, sfruttando in maniera essenziale l'ipotesi che $z = 0$ sia un polo semplice di $(z+T)^{-1}$ e di $(z+S)^{-1}$, dove $T = ML^{-1}$ e $S = M^*(L^*)^{-1}$, si prova il seguente risultato.

Teorema 3.3. *Sia $z = 0$ un polo semplice per $(z+T)^{-1}$, $(z+S)^{-1}$, dove $T = ML^{-1}$ e $S = M^*(L^*)^{-1}$. Allora, se la coppia (y,p) soddisfa (3.11), (3.14), (1.2), (3.15), $y_0 \in D(L)$, con $My \in H^1(0,\tau;H)$, $M^*p \in H^1(0,\tau;H)$, allora $u = -N^{-1}B^*p$ é l'unico controllo ottimo per il problema (1.1), (1.2), (1.3), con $\mathcal{U} = L^2(0,\tau;U)$.*

Cenno della dimostrazione. In forza delle assunzioni,

$$H = N(T) \oplus R(T) = N(S) \oplus R(S).$$

Se Q denota la proiezione su N(S) lungo R(S), si vede che ponendo $q = L^*p$, si ha

$$\int_0^\tau \langle -S\frac{d}{dt}(1-Q)q(u)(t), y(v)(t) - y(u)(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^\tau \langle p(u)(t), \frac{d}{dt}M[y(v)(t) - y(u)(t)]\rangle dt$$

e quindi

$$0 \leq \pi(u, v-u) - l(v-u)$$
$$= \int_0^\tau \langle p(u)(t), (\frac{d}{dt}M + L)(y(v)(t) - y(u)(t))\rangle dt + \langle Nu, v-u\rangle_{L^2(0,\tau;U)}$$
$$= \int_0^\tau \langle p(u)(t), B(v(t) - u(t))\rangle dt + \langle Nu, v-u\rangle_{L^2(0,\tau;U)}$$
$$= \langle B^* p(u) + Nu, v-u\rangle_{L^2(0,\tau;U)}$$

per ogni $v \in L^2(0,\tau;U)$. Pertanto, $u^* = -N^{-1}B^*p$ é proprio il controllo ottimo.
#

Esempio 1. Illustriamo con un esempio banale, ,na chiarificatore, l'ultimo risultato. Si tratta di minimizzare

$$J(u,v) = \int_0^\tau (x(t)^2 + y(t)^2 + u(t)^2 + v(t)^2)dt$$

con $u, v \in L^2(0,\tau)$, sotto i vincoli

$0 = -x(t) - v(t) + f(t), \quad 0 < t < \tau,$

$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t), \quad 0 < t < \tau,$

$y(0) = 0,$

essendo f un dato elemento di $L^2(0,\tau)$. Prendiamo $H = L^2(0,\tau : R^2)$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = C, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente,

$$J(u,v) = \int_0^\tau ([(f(t) - v(t))^2 + v(t)^2] + [y(t)^2 + u(t)^2])dt$$
$$\geq 2\int_0^\tau (v(t)^2 - f(t)v(t) + f(t)^2/2)dt \geq \frac{1}{2}\int_0^\tau f(t)^2 dt$$

prende il suo minimo in $(0, f/2) = (\bar{u}, \bar{v})$ e la soluzione ottima é $(\bar{x}, \bar{y}) = (f/2, 0)$. D'altra parte, il sistema (3.11), (3.14), (3.15), (1.2) diventa

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < t < \tau,$$

$$-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \quad 0 < t < \tau,$$

$$y(0) = q(\tau) = 0.$$

Dunque $y(t) = q(t) \equiv 0$ e allora $x(t) = \wp(t) = f(t)/2$. Pertanto

$$(u, v) = -B^*(p, q) = (0, f/2)$$

é il controllo ottimo, come giá visto. Peró il problema (3.11) $\sim$ (3.13) in questo caso non avrebbe soluzione se non fosse $f \in H^1(0, \tau)$, con $f(\tau) = 0$.

Esempio 2. Sia $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, un dominio aperto limitato di R^n con frontiera $\partial\Omega$ regolare. Nel cilindro $\Omega \times (0, \tau)$ consideriamo l'equazione di tipo Sobolev

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_0 - \Delta)y = \alpha\Delta y - \beta\Delta^2 y + f + u,$$

$$(\lambda_0 - \Delta)y(x, 0) = (\lambda_0 - \Delta)y_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$y(x, t) = \Delta y(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau),$$

dove λ_0 é il primo autovalore negativo del laplaciano Δ con condizioni ai limiti Dirichlet, $\alpha, \beta > 0$, $f \in L^2(\Omega \times (0, \tau))$ é dato, $y_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\Delta y_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e $u \in L^2(\Omega \times (0, \tau))$ é il controllo. Equazioni di questo tipo descrivono l'evoluzione di una superficie libera di un fluido filtrato. Le proprietá spettrali degli operatori L $(= -\alpha\Delta + \beta\Delta^2)$ e M $(= \lambda_0 - \Delta)$, con $D(L) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega); \Delta u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\}$, $D(M) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, sono descritte da Sviridyuk ed Efremov [11]. Vedi anche Favini e Yagi [8]. In particolare, $z = 0$ é un polo semplice per $L(zL + M)^{-1}$ e cosí il Teorema 3.2 si applica, per esempio, al funzionale

$$J(u) = \int_0^\tau |y(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^\tau |u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt.$$

4. Il problema two-point.

Il problema (3.11), (3.14), (3.15), (1.2), cioé

(4.1) $\quad \frac{d}{dt}(My) + Ly + BN^{-1}B^*p = f, \quad 0 < t < \tau,$

(4.2) $\quad -\frac{d}{dt}(M^*p) + L^*p = C^*C(y - y_0(\cdot)), \quad 0 < t < \tau,$

(4.3) $\quad (My)(0) = My_0, \quad M^*p(\tau) = 0,$

é un caso particolare del problema two-point degenere in uno spazio di Hilbert H

(4.4) $\quad (\frac{d}{dt}+\epsilon)(M_0 y) = -L_0 y - B_0 u + f(t), \quad 0 < t < \tau,$

(4.5) $\quad (-\frac{d}{dt}+\epsilon)(M_1 u) = B_1 y - L_1 u + g(t), \quad 0 < t < \tau,$

(4.6) $\quad M_0 y(0) = M_0 y_0, \quad M_1 u(\tau) = M_1 u_\tau,$

dove $\epsilon \geq 0$, $B_i \in L(H)$, L_i, M_i sono operatori lineari chiusi da H in sé, $0 \in p(L_i)$, $D(L_i) \subseteq D(M_i)$, $i = 0, 1$, $f, g \in L^2(0, \tau; H)$, $y_0 \in D(L_0)$, $u_\tau \in D(L_1)$. Tale problema é stato studiato da molti autori. Ricordiamo naturalmente Lions [9], Da Prato [6] e, in particolare, J. M. Cooper [4], quando $M_0 = M_1 = I = B_0 = B_1$. Qui si vuole estendere l'approccio di Favini e Venni in [7] al caso degenere. Precisamente, si suppone che i fasci operatoriali $(zL_0 + M_0)^{-1}$, $(zL_1 + M_1)^{-1}$ soddisfino l'ipotesi (2.1) con $m = 1$. Denotando con P_i la proiezione su $N(T_i)$ lungo $R(T_i)$, $i = 0, 1$, si ha il seguente teorema (vedi Barbu, Favini [2]) :

Teorema 4.1. *Siano L_i, M_i, B_i, $i = 0, 1$, operatori soddisfacenti le ipotesi sopra e sia $z = 0$ un polo semplice di $(z + T_i)^{-1}$, $T_i = M_i L_i^{-1}$, $i = 0, 1$. Esistano inoltre $h_0, h_1 > 0$ tali che*

(4.7) $\quad |L_0 u| \geq h_0 |u|, \quad |L_1 v| \geq h_1 |v|, \quad (u, v) \in \mathcal{D}(L_0) \times \mathcal{D}(L_1),$

(4.8) $\quad \|B_0\|_{L(H)} h_1^{-1} + \|B_1\|_{L(H)} h_0^{-1} < 1.$

Allora esiste $\epsilon_0 \geq 0$ tale che per ogni $\epsilon \geq \epsilon_0$ il problema (4.4) $\sim$ (4.6) ha una unica L^2-soluzione per ogni $f, g \in L^2(0, \tau; H)$ e ogni $y_0 \in D(L_0)$, $u_\tau \in D(L_1)$.

Osservazione. Facciamo presente che il Teorema 4.1 estende il risultato principale di Cooper [4]. Notiamo inoltre che l'assunzione del tipo (4.8) sembra inevitabile, senza qualche ipotesi aggiuntiva su B_0 e B_1. Basta considerare il sistema algebrico-differenziale

$$\dot{x} = -x + u + 3v + f,$$

$$0 = -y + u + v + g,$$

$$-\dot{u} = -u + 3y + h,$$

$$0 = -v + x + y - g,$$

con $f, g, h \in L^2(0, \tau)$, per vedere che se $f \neq h + 3g$, allora non ci sono soluzioni al problema. Si prova la seguente variante del Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Valgano le ipotesi indicate su L_i, M_i, B_i, L_i essendo invertibile e la proiezione P_i sia autoaggiunta, $i = 0, 1$. Se esiste $C_0 < 1$ tale che*

$$(4.9) \qquad Re\{\langle B_0 v, L_0 u\rangle - \langle B_1 u, L_1 v\rangle\} \geq -C_0(|L_0 u|^2 + |L_1 v|^2)^2,$$

$$\text{per ogni } (u,v) \in D(L_0) \times D(L_1),$$

allora per ogni $\epsilon \geq \epsilon_0 \geq 0$, ϵ_0 *opportuno, il problema (4.4)* $\sim$ *(4.6) ha una* L^2*-soluzione per ogni* $f, g \in L^2(0,\tau;H)$ *e ogni* $y_0 \in D(L_0)$, $u_\tau \in D(L_1)$.

Corollario. *Siano* L_i, M_i, B_i *operatori lineari chiusi da* H *in sé,* $B_i \in L(H)$, $D(L_i) \subseteq D(M_i)$ *e sia 0 un polo semplice per* $(z+T_i)^{-1}$, $T_i = M_i L_i^{-1}$ *con* P_i, *la corrispondente proiezione, autoaggiunta. Se vale (4.7), e, in piú,*

$$(4.10) \qquad \|B_0\|_{\mathcal{L}(H)} h_1^{-1} + \|B_1\|_{\mathcal{L}(H)} h_0^{-1} < 2,$$

allora (4.4) $\sim$ *(4.6) ha una* L^2*-soluzione per ogni* $f, g \in L^2(0,\tau;H)$ *e ogni* $y_0 \in D(L_0)$, $u_\tau \in D(L_1)$.

Esempio 3. Utilizziamo i risultati precedenti per il controllo ottimo di equazioni algebrico-differenziali. Prendiamo $H = Z = U = R^2$, $y_0(t) \equiv 0 = (0,0)$, $f(t) \equiv 0$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

secondo le notazioni della sezione 3. Allora il sistema (4.1) $\sim$ (4.3) diventa

$$(4.11) \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(4.12) \qquad -\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad 0 < t < \tau,$$

$$(4.13) \qquad y(0) = y_0, \quad q(\tau) = 0.$$

Allora il Teorema 4.2 si applica immediatamente. In effetti, se tentiamo una soluzione diretta del problema, otteniamo $x = -\frac{3}{5}y - \frac{q}{5}$, $p = \frac{2}{5}y - \frac{q}{5}$, da cui il problema classico

$$\dot{y} = -\frac{6}{5}y - \frac{2}{5}q,$$

$$-\dot{q} = -\frac{6}{5}q + \frac{2}{5}y,$$

che, insieme alle condizioni ai limiti (4.13), determina univocamente $y(\cdot)$, $q(\cdot)$ e quindi $x(\cdot)$ e $p(\cdot)$.

Esempio 4. (continuazione dell'Esempio 2). Si riconosce subito che al sistema (3.11), (3.14), (3.15), (1.2) si puó applicare il Teorema 4.2, in quanto gli operatori autoaggiunti M_i, L_i commutano, B_0 e B_1 coincidono con l'operatore identitá in $L^2(\Omega)$, $L_1 = L_0$, cosicché vale la (4.9) con $C_0 = 0$.

Bibliografia

[1] V. Barbu, A. Favini, *Control of degenerate differential systems* , Control and Cybernetics 28(1999), 397-420.

[2] V. Barbu, A. Favini, *A degenerate two-point problem,* Preprint.

[3] J. D. Cobb , *Descriptor variable systems and optimal state regulation,* IEEE Trans. Aut. Control AC-28 (1983), 601-611.

[4] J. M. Cooper , *Two-point problems for abstract evolution equations,* J. Diff. Eqs. 9(1971), 453-495.

[5] L. Dai, "Singular Control Systems", Lecture Notes in Control and Information Sciences 118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[6] G. Da Prato , *Weak solutions for linear abstract differential equations in Banach spaces,* Advances in Math. 5 (1970), 181-245.

[7] A. Favini, A. Venni, *On a two-point problem for a system of abstract differential equations,* Numer. Funct. Anal. and Optim. 2(4) (1980), 301-322.

[8] A. Favini, A. Yagi, "Degenerate Differential Equations in Banach Spaces", Monographs and Textbooks in Pure Appl. Math. 215, M. Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1999.

[9] J. L. Lions, "Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations", Die Grandlehren math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen 170, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[10] L. Pandolfi, *On the regulator problem for linear degenerate control systems,* J. Optim. Theory Appl. 33 (1981), 241-254.

[11] G. A. Sviridyuk, A. A. Efremov, *Optimal control of Sobolev-type linear equations with relatively p-sectorial operators,*Diff. Uravn. 31 (1995), 1912-1916 ; (Engl. Transl. : Diff. Eqns. 31 (1995), 1882-1890).